1074. 或種ノ束ノ間ノ結準同型束ニツイテ

岩村　聯（東大）

§1. 補助定理　$f, g, \cdots\cdots$ ヲ元トスル束 $\mathcal{L}$ ノ部分集合 K ガ條件.

$$(K)\begin{cases} \text{スベテノ } f\in\mathcal{L} \text{ ニ對シテ, } f\geq h\in K \text{ ナル最大ノ} \\ h \text{ ガ存在シ, ソレヲ } f^{\circ} \text{ トスルトキ} \\ (f\vee g)^{\circ}=f^{\circ}\vee g^{\circ} \end{cases}$$

ヲ満足スレバ, K ハ $\mathcal{L}$ ニ準同型ナ束（K ノ半順序ハ $\mathcal{L}$ ノ半順序ト一致スル）ヲナス. 尚ホ, $(f\vee g)^{\circ}=f^{\circ}\vee g^{\circ}$ ナレ

性質ヲ有スル對應○ヲ結準同型ト言フコトニシマス。

証明　Kノ一般元ハf°ナル形デ表ハサレマス。今Kニ於ケルoperation $\mathring{\vee}$, $\mathring{\wedge}$ヲ

$$f^\circ \mathring{\vee} g^\circ = f^\circ \vee g^\circ,\quad f^\circ \mathring{\wedge} g^\circ = (f^\circ \wedge g^\circ)^\circ$$

ト定メルト，$f^\circ \mathring{\vee} g^\circ \in K \ni f^\circ \mathring{\wedge} g^\circ$トナリ，明カニ$\mathring{\vee}$, $\mathring{\wedge}$ガKニ於ケル結ビ及ビ交リトナッテヰマス。○ガ$\mathcal{L}$カラKヘノ準同型ヲ與ヘルコトヲ示セバヨイ。所ガ(K)ニヨッテ，○ガ結準同型デアルコトガワカッテヰマスカラ，証明スルコトハ．

$$(f \wedge g)^\circ = f^\circ \mathring{\wedge} g^\circ$$

サテf°ノ定義カラ

$$f \geq f^\circ;\quad f \geq g \rightarrow f^\circ \geq g^\circ;\quad f^\circ = f^{\circ\circ}$$

従ッテ　$f^\circ \wedge g^\circ \geq (f \wedge g)^\circ$　トナッテ

$$(f \wedge g)^\circ \geq (f^\circ \wedge g^\circ)^\circ \geq (f \wedge g)^{\circ\circ} = (f \wedge g)^\circ$$

故ニ　$(f \wedge g)^\circ = (f^\circ \wedge g^\circ)^\circ = f^\circ \mathring{\wedge} g^\circ$

——証明終リ——

従ッテ$\mathcal{L}$ガdistributiveデアッタリmodularデアッタリスレバKニ同様ナ性質ヲ持ツワケデス。

次ニL, L'ヲ束$(\vee, \wedge, \leqq)$トシ，ソレラノ元ヲ$a, b,$ -----, $x, y,$ -----; トシマス．L全体ヲL'ノ中ニ寫ス單調増大函數ノ全体ヲ$L'^{L} \ni f, g,$ ----- トシ，$x \in L$ニ於ケルfノ値ヲfxトシマス:　$x \leqq y \rightarrow fx \leqq fy$.　今$f, g \in L'^{L}$ニ對シ

$$f \leq g \rightleftarrows [x \in L \to fx \leq fy]$$

ニヨッテ半順序 $\leq$ ヲ定メルト，L'^{L} ハ束トナッテ

$$(f \vee g)x = fx \vee gx, \quad (f \wedge g)x = fx \wedge gx$$

L'^{L} ガ modular, distributive, $\uparrow$continuous（即チ $f \uparrow f_0$ ナラバ $f \wedge g \uparrow f_0 \wedge g$）又ハ $\downarrow$continuous デアルタメノ完全條件ハ L' ガ夫々此ノ性質ヲ有スルコトデアル．コレハ殆ンド明カデスカラ一々証明ハシマセン。

今 $\mathcal{L} = L'^{L}$ トシテ，補助定理ノ條件（K）ガ成立スルヤウナ K ヲ取レバ，上ニ述ベタコトニヨッテ，L' ガ distributive 又ハ modular ナラバ K ガ distributive 又ハ modular トナルノケデス。(註) 又，L' ガ完全束ナラバ K ガ完全束デアルコトモ容易ニワカリマス。此ノ場合 L 及ビ L' ニアル條件ヲ與ヘレバ，K トシテ，L カラ L' ノ中ヘノ結準同型ノ全体ヲ取ルコトガ出来ルトイフノガコノ談話ノ要旨デス。

§2. コノ§デハ descending chain condition（D C. ト略記）ヲ満足スル分配束 L カラ任意ノ束 L' ノ中ヘノ結準同型ノ全体ヲ K トシ $\mathcal{L} = L'^{L}$ トスルトキ，コノ K ガ補助定理ノ條件（K）ヲ満足スルコトヲ証明シマス。コレガ証明サレレバ D. C. ヲ満足スル分配束カラ，分配束 L' ノ中ヘノ結準同型ノ全体ガ分配束トナルコトガワカルコトニナリマス。

(註) 一般ニ L' ニ於ケル束恒等式ハスベテ K デ成立スル。

L ハ上記ノヤウナ束トシ，ソノ空デナイ有限部分集合ヲ

A, B, ----- ト記シ，$\bigvee_{x\in A} x = \bigvee_{b\neq x\in A} x$ ナル b ヲ A ノ無駄トイヒ，

$a=\bigvee_{x\in A} x$ ナルトキ A ヲ a ノ（結）分解トイフコトニシマス。

a ノ分解ガ必ズ a ヲ含ムトキ，a ヲ結既約或ハ単ニ既約ト言ヒ，a ノ分解 A ガ無駄ヲ含マズ，且ツソノ元ガスベテ既約デアルトキ，A ヲ a ノ既約（結）分解トイフコトニシマス。

A, B ガ夫々 a, b ノ分解デアルトキ A B（A, B ノ和集合）ハ $a \vee b$ ノ分解トナリマス。

次ニ A ガ a ノ既約分解，B ガ b ノ分解デアルトキ，$a\leq b$ ナラバ，スベテノ $x\in A$ ニ対シテ $x\leq y\in B$ ナル y ガ存在シマス。

ソレハ，$X=(x\wedge y;\ y\in B)$ トスレバ $x\leq a\leq b$ デスカラ

$$\bigvee_{z\in X} z=\bigvee_{y\in B}(x\wedge y)=x\wedge\Big(\bigvee_{y\in B} y\Big)=x\wedge b=x$$

トナッテ，X ハ x ノ分解トナリマス。x ハ既約デスカラ $x\in X$，即チ $x=x\wedge y$，$y\in B$ ナル y ガ存在スルコトニナルワケデス。

今任意ノ $f\in L'^{L}$ ニ対シテ f° ヲ

$$f^{\circ}a=\bigvee_{x\in A} fx \quad (\text{A ハ } a \text{ ノ既約分解})$$

ニヨッテ定義シマス。スベテノ $a\in L$ ニ對シテ a ノ既約分解ハ一意的ニ存在シマス。(Birkhoff: Lattice theory, Theorem 5.12 參照。既約元ノ定義ガ少シ違ヒマスガ結局此処デ下シタ定義ト同ジモノニナリマス。但シコノ Theorem ノ双對) カラ，f^0 ハ f ニ對シテ一意的ニ定マリマス。上ニ述ベタコトカラ，$a\leq b\rightarrow f^0a\leq f^0b$ トナリマスカラ $f^0\in L'^L$

コノ f^0 ガ，$f\geq h\in K$ ナル h ノ最大ナモノデアルコトヲ次ノ様ニシテ知ルコトガ出来マス。

a, b ノ既約分解ヲ夫々 A, B トシ $a\vee b$ ノ既約分解ヲ C トシマス。$A\cup B$ ハ $a\vee b$ ノ分解デスカラ，スベテノ $x\in C$ ニ對シテ，$x\leq y\in A\cup B$ ナル y ガ存在シマス。

從ッテ

$$f^0(a\vee b)=\bigvee_{x\in C}fx\leq\bigvee_{x\in A\cup B}fx=\Big(\bigvee_{x\in A}fx\Big)\vee\Big(\bigvee_{x\in B}fx\Big)=f^0a\vee f^0b$$

即チ $f^0(a\vee b)\leq f^0a\vee f^0b$. 一方 $f^0\in L'^L$ デスカラ

$$f^0(a\vee b)\geq f^0a\vee f^0b$$

故ニ $\quad f^0(a\vee b)=f^0a\vee f^0b$

トナッテ $f^0\in K$ トナリマス。

次ニ $f\geq h\in K$ トシ，A ヲ a ノ既約分解トスレバ

$$f^0a=\bigvee_{x\in A}fx\geq\bigvee_{x\in A}hx=h\Big(\bigvee_{x\in A}x\Big)=ha$$

即チ $f^0\geq h$.

以上デ f° ハ，$f \geq h \in K$ ナル h ノ最大ナモノデアルコトガワカリマシタ。 残リハ $(f \vee g)^\circ = f^\circ \vee g^\circ$ ノ証明デスガ A ヲ a ノ既約分解トスルト

$$(f\vee g)^\circ a = \bigvee_{x\in A}(f\vee g)x = \bigvee_{x\in A}(fx \vee gx)$$

$$= \left(\bigvee_{x\in A} fx\right)\vee\left(\bigvee_{x\in A} gx\right) = f^\circ a \vee g^\circ a$$

デ，コレガ成立シマス。

以上デコノ§ノ目標ハ達セラレマシタ．次ノ§デハ L ヲ一般ノ分配束トシテ，L' ヲ ↓ continuous トシタ場合ヲ目標トシマス。

§3. 束 L ノ空デナイ部分集合 D デ $\bigvee_{x\in D} x$ ノ存在スル（ソレガ D ノ元デアルコトハ要シナイ）モノニツイテ，$y\in L$ ノトキ，

i) $\bigvee_{x\in D} x \geq y$ ナラバ $D\wedge y = (x\wedge y;\ x\in D)$

ii) 其ノ他ノトキハ $D\wedge y = \{y\}$

ニヨッテ $D\wedge y$ ヲ定メマス。

$\mathcal{D}$ ハ L ノ空デナイ部分集合ノ空デナイ集合デ，スベテノ $D\in\mathcal{D}$ トスベテノ $y\in L$ ニ對シテ，

1) $\bigvee_{x\in D} x$ ガ存在スル.

2) $D\wedge y \in \mathcal{D}$

3) $y = \bigvee_{u \in D \wedge y} u$

デアルヤウナモノトシマス。

$\mathfrak{D}$ ハスベテノ $\{y\}$ ($y \in L$) ヲ含ミマスガ，コノ trivial ナモノ以外ニ如何ナルモノガ $\mathfrak{D}$ ニ含マレ得ルカハ L ノ性質ニヨリマス。

例1. L ガ分配束ナラスベテノ $\{x, y\}$ 型ノ部分集合ヲ以テ $\mathfrak{D}$ ヲ作ルコトガ出来ル。

例2. L ガ完全束デアッテ ↑ continuous（即チ $x \uparrow x_0$ ナラバ $x \wedge y \uparrow x_0 \wedge y$）ナラバ，$L$ ノ空デナイ部分集合デ全順序ニツイタモノ全体ヲ $\mathfrak{D}$ トシテヨイ。

例3. 上例ニ更ニ L ガ分配束デアルトイフ條件ガアレバ，L ノ空デナイ部分集合全体ヲ $\mathfrak{D}$ トスルコトガ出来マス。

此ノ他，條件附ノ完全性（即チ有界ナ部分集合ニ對シテ必ズ結ビヤ交ハリガ存在スル）トカ，可附番的ニ完全デアル（即チ可附番部分集合ニ対シテハ結ビヤ交ハリガ存在スル）トイフヤウナ條件ヲ例２ノ完全性ノ代リニ入レルト夫々異ル $\mathfrak{D}$ ガ作ラレマス。

最後ニ，$D \in \mathfrak{D} \to f\left(\bigvee_{x \in D} x\right) = \bigvee_{x \in D} fx$ ナルコトヲ「f ハ $\mathfrak{D}$ ニツイテ結ビヲ保存スル」トイフコトニシマス。

§4. 定理. L'ガ完全束デ, ↓continuous(即チ $x\downarrow x_0$ ナラバ $x\vee y\downarrow x_0\vee y$)ナラバ, $\mathfrak{D}$ ニツイテ結ビヲ保存スル $f\in\mathcal{L}=L'^{L}$ ノ全体ヲ K トスルトキ, K ハ補助定理ノ條件(K)ヲ満足シ, 従ッテ $\mathcal{L}$ ハ準同型ナ束ヲナス。

証明. $f\in L'^{L}$, $D\in\mathfrak{D}$ トシマストDへyノ定義カラ

$$fy\geq\bigvee_{u\in D\wedge y}fu$$

デアルコトハ明カデスガ, 更ニ

$$y\leq z\rightarrow\bigvee_{u\in D\wedge y}fu\leq\bigvee_{v\in D\wedge z}fv$$

デアルコトガ知レマス。

$z\leq\bigvee_{x\in D}x$ ノトキハ $y\leq\bigvee_{x\in D}x$ デ

$$\bigvee_{u\in D\wedge y}fu=\bigvee_{x\in D}f(x\wedge y)\leq\bigvee_{x\in D}f(x\wedge z)=\bigvee_{u\in D\wedge z}fz。$$

$y\leq\bigvee_{x\in D}x$, $z\not\leq\bigvee_{x\in D}x$ ノトキハ

$$\bigvee_{u\in D\wedge y}fu\leq fy\leq fz=\bigvee_{v\in D\wedge z}fv。$$

$y\not\leq\bigvee_{x\in D}x$ ノトキハ $z\not\leq\bigvee_{x\in D}x$ デ

$$\bigvee_{u\in D\wedge y}fu=fy\leq fz=\bigvee_{v\in D\wedge z}fv.$$

ソコデ今 Df ヲ $(Df)y=\bigvee_{u\in D\wedge y}fu$ ニヨッテ定メルト $f\geq Df\in\mathcal{L}=L'^{L}$ トナルワケデスガ, 更ニ

$$(D(f^{\vee}g))y = \bigvee_{u \in D_{\wedge}y} (f^{\vee}g)u = \bigvee_{u \in D_{\wedge}y} (fu^{\vee}gu)$$

$$= (\bigvee_{u} fu)^{\vee} (\bigvee_{u} gu) = (Df)y^{\vee}(Dg)y$$

トナリマスカラ，D ガ additive operator トナリマス：

$$D(f^{\vee}g) = Df^{\vee}Dg.$$

コレカラ直チニ

$$f \geq g \to Df \geq Dg.$$

又，$h \in K$ トスル，即チ h ガ $\mathfrak{D}$ ニツイテ結ビヲ保存スルトシマスト，$D_{\wedge}y \in \mathfrak{D}$ デスカラ

$$h(\bigvee_{u \in D_{\wedge}y} u) = \bigvee_{u \in D_{\wedge}y} hu.$$

従ッテ　$hy = (Dh)y.$

即チ　$h \in K \longrightarrow h = Dh,$

従ッテ　$f \geq h \in K \to Df \geq h.$

今 $\mathfrak{D}$ ノ元全体ヲ整列シテ $D_0, D_1, \cdots\cdots, D_\xi, \cdots\cdots; \xi < \varphi$ トシマス．任意ノ順序数 η ハ $\eta = \varphi\zeta + \xi$，$\xi < \varphi$ ナル形ニ書カレテ，ξ ハ一意的ニ定マリマスカラ，コノ ξ ニ対シテ $D_\eta = D_\xi$ ト定メマス．従ッテ任意ノ順序数 $\bar{\eta}$ ト任意ノ $D \in \mathfrak{D}$ ニ対シテ，$D = D_\eta$，$\bar{\eta} \leq \eta$ ナル η ガ存在スルコトニナリマス．

サテ，超限帰納法ニヨッテ f_η ヲ

a)　$f_0 = f$

$\eta+1)$ $\quad f_{\eta+1} = D_\eta f_\eta$

$\lambda)$ $\quad f_\lambda = \bigwedge_{\eta<\lambda} f_\eta \quad$ （λハ極限數）

ト定メマス。從ツテ

$$f = f_0 \geq f_1 \geq f_2 \geq \cdots\cdots \geq f_\eta \geq f_{\eta+1} \geq \cdots\cdots$$

ソシテ，超限帰納法デ容易ニ次ノコトガ分リマス。

$f \geq h \in K$ ナラ，任意ノ η ニ對シテ $f_\eta \geq h$。

次ニ任意ノ η ニ對シテ $(f \vee g)_\eta = f_\eta \vee g_\eta$ デアルコトガ超限帰納法デ證明サレマス。

$0)$ $\quad (f \vee g)_0 = f_0 \vee g_0$ ハ trivial

$\eta+1)$ $\quad (f \vee g)_\eta = f_\eta \vee g_\eta$ ナラバ，

$$(f \vee g)_{\eta+1} = D_\eta (f \vee g)_\eta = D_\eta (f_\eta \vee g_\eta)$$

$$= D_\eta f_\eta \vee D_\eta g_\eta = f_{\eta+1} \vee g_{\eta+1}$$

$\lambda)$ スベテノ $\eta < \lambda$ ニ對シテ $(f \vee g)_\eta = f_\eta \vee g_\eta$ ガアッタトシマス。

L' ガ ↓continuous デスカラ，$\mathcal{L} = L'^{L}$ モ亦 ↓continuous. ソシテ $f_\eta \downarrow f_\lambda$，$g_\eta \downarrow g_\lambda$ デスカラ $f_\eta \vee g_\eta \downarrow f_\lambda \vee g_\lambda$ （↓continuity カラ此ノ結論ガ出ルコトハ，例ヘバ Birkhoff: Lattice theory p. 30. 別ニ參照スル程ノ事モアリマセンガ）。ソコデ $(f \vee g)_\eta \downarrow f_\lambda \vee g_\lambda$，所ガ $(f \vee g)_\eta \downarrow (f \vee g)_\lambda$ デスカラ $(f \vee g)_\lambda = f_\lambda \vee g_\lambda$.

從ツテスベテノ η ニ對シテ

$$(f^\vee g)_\eta = f_\eta{}^\vee g_\eta.$$

サテ $f_0 \geq f_1 \geq \cdots\cdots \geq f_\eta \geq f_{\eta+1} \geq \cdots\cdots$ ノ列ノ中デ＞ノ成立スル箇所ハ L^{L} ノ濃度ヨリ多クハアリマセンカラ、或ル $\bar\eta$ ニツイテハ

(※)　$\bar\eta \leq \eta$ ナラバ $f_\eta = f_{\bar\eta}$

トナリマス。任意ノ $D \in \mathfrak{D}$ ニ對シテ、$D = D_\eta$, $\bar\eta \leq \eta$ ナル η ヲ取ッテ見レバ、(※)カラ直チニ

$$D f_{\bar\eta} = f_{\bar\eta}$$

ガ得ラレマス。$y = \bigvee_{x\in D} x$ トスルト、$D \wedge y = D$ デスカラ、上式カラ次ノ式ガ得ラレマス。

$$\bigvee_{x\in D} f_{\bar\eta}\, x = (D f_{\bar\eta})\, y = f_{\bar\eta}\, y = f_{\bar\eta}\Big(\bigvee_{x\in D} x\Big)$$

$D(\in \mathfrak{D})$ ハ任意デシタカラ、コノ式ニヨッテ、$f_{\bar\eta} \in K$

前ニ述ベマシタ様ニ、$f \geq h \in K$ ナラ $f_{\bar\eta} \geq h$ ナノデスカラ、$f_{\bar\eta}$ ハコノヤウナ h ノ中デ最大ナモノトナリマス。

ソコデ $f_{\bar\eta}$ ヲ f° ト記シマス。

(※)ノ様ナ $\bar\eta$ ガ一ツ與ヘラレレバ、任意ノ $\bar\eta' \geq \bar\eta$ ニ對シテ $f_{\bar\eta'} = f_{\bar\eta} = f^\circ$ デスカラ、今 $f, g, f^\vee g$ ニ對シテ夫々 $\bar\eta_1, \bar\eta_2, \bar\eta_3$ ガ(※)ヲ成立サセルトスルトキ、各々ノ $\bar\eta_j$ ヲ $\bar\eta = \bar\eta_1 + \bar\eta_2 + \bar\eta_3$ デ置キ換ヘテモヨロシイ、即チ

$$(f^\vee g)^\circ = (f^\vee g)_{\bar\eta} = f_{\bar\eta}{}^\vee g_{\bar\eta} = f^\circ{}^\vee g^\circ$$

コレデ條件(K)ガ成立スルコトガワカッタワケデス。

§5. 今§4ノ定理ヲ§3ノ各例ニ適用シテ見マス。

L'ハ兎ニ角↓continuousナ完全束トシテ。

例1. Lガ分配束ノトキ、$\mathfrak{B}$ハアラユル$\{x, y\}$型ノLノ部分集合ノ集合トシテ、KハLカラL'ノ中ヘノ結準同型全体ヲ取ッタコトニナリマス。

例2. Lガ↑continuousナ完全束、$\mathfrak{B}$ハLノ空デナイ全順序部分集合ノ全体トシテ、Kハ次ノヤウナ写像$f \in L'^{L}$

「$x \uparrow x_0$ ナラバ $fx \uparrow fx_0$」

ノ全体トナリマス。

例3. Lガ↑continuousナ分配完全束、$\mathfrak{B}$ハLノ空デナイ部分集合全体トシテ、KハLカラL'ノ中ヘノ結準同型デ無限個ノ元ノ結ビヲモ保存スルモノ全体トナリマス。

ソコデ例ヘバL'ヲ分配束デアルトスレバ、コレラノKガ何レモ分配束トナルコトハ§1デ述ベタ通リデス。